

Dev n° 31

Ref: Ulmer, Felix "Anneaux, corps, résultants : Algèbre pour L3 / M1 / agrégation" p 103-104 + Carrega : "Théorie des corps" p 25-28
 Site: Hugo
 Grande aide de Soledad

Titre: Thm Wantzel

On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des nb constructibles

Thm: (Wantzel)

Sait $\alpha \in \mathbb{R}$

Alors, $\alpha \in \mathbb{E}$ si $\exists L_0, \dots, L_p$ suite finie de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant
 $L_0 = \mathbb{Q}$, $\forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $[L_{i+1} : L_i] = 2$ et $\alpha \in L_p$.

Démo:

Procédons par double implication.

⇒ S.g. α constructible.

Alors, $\exists \Pi$ point t.q. α est l'abscisse de Π .

Π s'obtient à l'aide d'un nb fini de constructions de points $\Pi_1, \dots, \Pi_m$.

$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on note (x_i, y_i) les coord. de Π_i .

On a donc une tour d'extension : $\underbrace{K_0}_{=\mathbb{Q}} \subset K_1 \subset \dots \subset K_m$ avec $\alpha \in K_m$
 et $\forall i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$
 $K_{i+1} = K_i(x_i, y_i)$.

Π_i g. $[K_{i+1} : K_i] \leq 2$, $\forall i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$.

*1^{er} Cas: Π_i intersection de deux droites

Alors, (x_i, y_i) vérifiant : $\begin{cases} ax_i + by_i = c \\ dx_i + ey_i = f \end{cases}$ avec $a, b, c, d, e, f \in K_i$

Dans ce cas $x_i, y_i \in K_i \Rightarrow [K_{i+1} : K_i] = 1$.

*2nd Cas: Π_i intersection d'une droite et d'un cercle

Le rayon du cercle est constructible.

Alors, (x_i, y_i) vérifiant : $\begin{cases} ax_i + by_i = c \\ (x_i - d)^2 + (y_i - e)^2 = f^2 \end{cases}$ avec $a, b, c, d, e, f \in K_i$

$$\bullet \text{ si } a \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{c - by_i}{a} \in K_i(y_i) \\ y_i \text{ racine pol. de degré 2.} \end{cases}$$

Donc, $[K_i(y_i) : K_i] \leq 2$ et $x_i \in K_i(y_i) \Rightarrow [K_{i+1} : K_i] \leq 2$.

$$\bullet \text{ si } a = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_i = c/b \in K_i & (b \neq 0 \text{ impossible sinon } (x_i, y_i) \text{ pas intersection entre droite et cercle}) \\ x_i \text{ racine pol. de degré 2} \end{cases}$$

$\leadsto [K_{i+1} : K_i] \leq 2$

*3^{ème} Cas: Π_i intersection de deux cercles

Alors, (x_i, y_i) vérifiant : $\begin{cases} (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = c^2 \\ (x_i - d)^2 + (y_i - e)^2 = f^2 \end{cases}$ avec $a, b, c, d, e, f \in K_i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(a-d)x_i - 2(b-e)y_i = c^2 - f^2 - a^2 - b^2 + d^2 + e^2 \\ (x_i - d)^2 + (y_i - e)^2 = f^2 \end{cases}$$

On se ramène au cas 2. (On a soustrait la 2nd ligne à la 1^{re}.)

* CCL:

On se ramène au cas 2. (On a soustrait la 2nd ligne à la 1^{re}.)

* CCL:

Il suffit alors d'extraire de la suite $(k_0, \dots, k_m)$ une sous-suite $(L_0, \dots, L_p)$ strictement croissante (au sens de l'inclusion) en ne conservant dans la suite initiale que les corps d'extension quadratique avec $L_0 = k_0$ et $L_p = k_m$. On a donc le résultat souhaité.

⊢ Prenons $L_0, \dots, L_p$ suite finie de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$L_0 = \mathbb{Q}, \quad \forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, [L_{i+1} : L_i] = 2 \text{ et } \alpha \in L_p.$$

Montrons par récurrence que $\forall j \in \llbracket 0, p \rrbracket, L_j \subseteq \mathbb{E}$.

Ⓘ $L_0 = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{E}$.

Ⓗ Sg $L_j \subseteq \mathbb{E}$ pour $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

Soit $x \in L_{j+1}$. Par hypothèse $[L_{j+1} : L_j] = 2$.

La famille $(1, x, x^2)$ est L_j -liée :

$$\exists a, b, c \in L_j \text{ non tous nuls t.q. } ax^2 + bx + c = 0.$$

- si $a=0$: alors $x = \frac{-c}{b} \in L_j \Rightarrow x \in \mathbb{E}$.

- si $a \neq 0$: alors $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Comme $\mathbb{E}$ s-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée: $x \in \mathbb{E}$.

Donc, $L_{j+1} \subseteq \mathbb{E}$.

Ⓢ CCL $L_p \subseteq \mathbb{E} \Rightarrow \alpha$ constructible $\square$

Cor:

$$\alpha \in \mathbb{E}, \text{ alors } [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^p, p \in \mathbb{N}.$$

Démo:

Par le thm de base télescopique $\square$

Annexe:

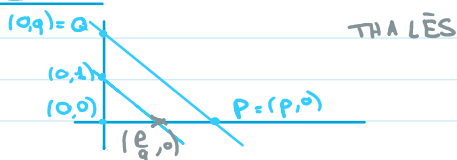
• Lemme: (1)

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{E}.$$

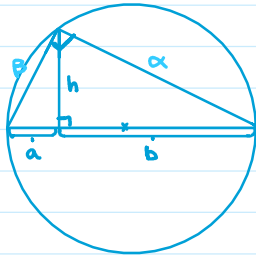
Lemme: (2)

$\mathbb{E}$ est stable par la racine carré

Démo: (1)



Démo: (2)



$$h = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 = h^2 + b^2 \\ \beta^2 = h^2 + a^2 \\ \beta^2 + \alpha^2 = (a+b)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} (a+b)^2 &= 2h^2 + a^2 + b^2 \\ \Rightarrow 2ab &= 2h^2 \\ \Rightarrow h &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

$E = \{\text{nb constructibles}\}$

Thm: (Wantzel)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors, $\alpha \in E$ ssi $\exists L_0, \dots, L_p$ suite finie de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $L_0 = \mathbb{Q}$;
- $\forall i \in [0, p-1], [L_{i+1} : L_i] = 2$;
- $\alpha \in L_p$.

Démo:

$\Rightarrow$ S.g $\alpha \in E$.

Alors, $\exists \Pi \in \mathbb{R}^2$ t.q α soit l'abscisse de Π .

Π s'obtient à l'aide d'un nb fini de construction de points.

$\Pi_1, \dots, \Pi_m$ de coord. $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$.

On a une tour d'extension: $K_0 = \mathbb{Q} \subseteq \dots \subseteq K_m \ni \alpha$.

$$\forall i \in [1, m-1], K_{i+1} = K_i(x_i, y_i)$$

M.q. $[K_{i+1} : K_i] \leq 2, \forall i \in [1, m-1]$.

Π s'obtient grâce à l'intersection entre:

* Deux droites:

$$\begin{cases} ax_i + by_i = c \\ dx_i + ey_i = f \end{cases} \quad a, \dots, f \in K_i$$

$$\Rightarrow x_i, y_i \in K_i \Rightarrow [K_{i+1} : K_i] = 1.$$

* Droite et cercle:

$$\begin{cases} ax_i + by_i = c \\ (x_i - d)^2 + (y_i - e)^2 = f \end{cases} \quad a, \dots, f \in K_i$$

$$\hookrightarrow \text{si } a \neq 0: \begin{cases} x_i = \frac{c - by_i}{a} \in K_i \\ y_i \text{ racine pol. 2nd degré} \end{cases}$$

$$\text{Donc } [K_{i+1} : K_i] = [K_i(y_i) : K_i] \leq 2$$

$$\hookrightarrow \text{si } a = 0: \begin{cases} y_i = c/b \in K_i \\ x_i \text{ racine pol. 2nd degré} \end{cases}$$

$$\text{Donc } [K_{i+1} : K_i] = [K_i(x_i) : K_i] \leq 2.$$

* Deux cercles:

$$\begin{cases} (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 = c^2 \\ (x_i - d)^2 + (y_i - e)^2 = f^2 \end{cases} \quad a, \dots, f \in K_i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(a+d)x_i - 2(b+e)y_i = c^2 - a^2 - b^2 - f^2 + d^2 + e^2 \\ \text{"} \end{cases}$$

On retrouve la situation précédente

* CCL:

On extrait de $(K_0, \dots, K_m)$ une ss-suite $(L_0, \dots, L_p)$ strict. croissante avec $K_0 = L_0$ et $K_m = L_p$.

$\square \Rightarrow$ Par récurrence m.q. $\forall j \in [0, p], L_j \subset E$.

(I) $L_0 = \mathbb{Q} \subset E$.

(H) S.g $L_j \subset E$ avec $j \leq p-1$.

Soit $x \in L_{j+1}$. Par h. $[L_{j+1} : L_j] = 2$ donc $(1, x, x^2)$ est liée: $\exists a, b, c \in L_j$ non tous nuls t.q:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\hookrightarrow \text{si } a = 0: x = c/b \in L_j \subset E$$

$$\hookrightarrow \text{si } a \neq 0: x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in E \text{ car E stable par } \sqrt{}$$

(CCL) OK $\square$

Cor:

$$\boxed{\alpha \in E \text{ alors } [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^p \text{ avec } p \in \mathbb{N}}$$

Démo:

base télescopique $\square$